



Formación de profesores de matemáticas y la enseñanza de la derivada: tareas para la comprensión y uso de diferentes modos de representación del concepto

Resumen ejecutivo: En este trabajo describimos parte del diseño de una serie de tareas dirigidas a profesores de matemáticas en servicio, orientadas a la creación de condiciones didácticas para el aprendizaje de la derivada, y que tienen en cuenta el uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje como herramienta del diseño. Este diseño se ha inspirado en las pautas para la elección de problemas matemáticos propuestas desde la teoría de la objetivación. En concreto, presentamos la primera de tres tareas que componen nuestro diseño.

Palabras clave: Trayectoria de aprendizaje, Diseño de tareas, Niveles de comprensión del concepto de derivada.

INTRODUCCIÓN

Desde el año 2021, en Chile se comenzó a implementar la asignatura *Límites, derivadas e integrales* dentro del plan curricular diferenciado de algunas escuelas de enseñanza media (16 y 17 años), específicamente en aquellas de dependencia Humanista Científico. En lo que respecta al concepto de derivada, uno de los Objetivos de Aprendizaje (OA) que se pretenden con esta asignatura es que los estudiantes modelen situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido (MINEDUC, 2021). Detrás de este OA, se puede notar un modo de representación dominante (analítico) en el tratamiento del concepto de derivada dentro de este programa, lo que deja de lado otros modos (p. ej., gráfica y analítico-numérico) igualmente importantes en el estudio de este tópico.

En el campo de la Educación Matemática, autores como Sánchez-Matamoros (2004) se han dedicado al análisis de tareas sobre derivada desde tres niveles de comprensión para este concepto (Intra, Inter y Trans). Estos niveles intentan dar cuenta de la relación que los estudiantes establecen con los distintos elementos matemáticos presentes en la tarea. Por su parte, Sánchez-Matamoros (2014) propone una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) en la que sintetiza los modos de representación del concepto de derivada, junto con los elementos matemáticos que están presentes en cada uno de estos modos. Además, esta THA presenta los distintos niveles por los que el estudiante ha de transitar en el proceso de aprendizaje.

Reconociendo el valor de los aportes de esta autora, consideramos que la THA constituye la materia prima para el diseño e implementación de tareas que inviten a los profesores de matemáticas, encargados de la asignatura *Límites, derivadas e integrales*, a crear condiciones didácticas para el aprendizaje de la derivada, desde los diferentes modos de representación que nos plantea Sánchez-Matamoros (2014). Es por ello que, en este trabajo, nos proponemos a describir parte del diseño de una serie de tareas orientadas a la creación de condiciones didácticas para el aprendizaje de la derivada, y que tienen en cuenta el uso de una THA como herramienta del diseño.

METODOLOGÍA

Para el diseño de las tareas nos hemos inspirado en las pautas para la elección de los problemas matemáticos propuestas por Radford (2023), en el marco de la teoría de la objetivación. En esta teoría, la actividad





de enseñanza-aprendizaje se estructura según dos componentes. Una de estas componentes está relacionada con el proyecto didáctico del formador (componente didáctica Φ), la cual se estructura en: (i) un *objeto*, esto es, aquello que se quiere alcanzar en la actividad; (ii) una o varias *metas*, éstas son, objetivos intermedios que van en dirección al logro del objeto de la actividad; y (iii) *tareas* que permiten alcanzar las metas establecidas. Para Radford (2023), las tareas son concebidas como una serie de problemas con una complejidad conceptual creciente.

RESULTADOS Y COMENTARIOS FINALES

Nuestro diseño contempla los siguientes aspectos:

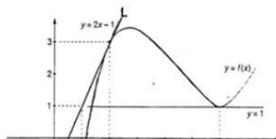
Objeto: crear las condiciones didácticas que permitan a los estudiantes de 3° y 4° medio encontrar formas histórico-culturales de pensar matemáticamente la derivada de una función en una variable real;

Metas: (1) establecer relaciones entre problemas de derivada y una trayectoria de aprendizaje y niveles de comprensión sobre este concepto, (2) posicionarse críticamente ante el uso de THA como herramienta de análisis de respuestas de estudiantes a tareas sobre el concepto derivada, y (3) diseñar tareas sobre el concepto de derivada teniendo en cuenta diferentes modos de representación de este tópico y a partir de las pautas para el diseño de tareas de la teoría de la objetivación.

En este trabajo presentamos la primera de las tres tareas que componen nuestro diseño. Por limitaciones de espacio, a continuación, presentamos el enunciado del problema 1 que compone la tarea en cuestión.

Simón es un profesor de matemáticas que ha ejercido los primeros 5 años de su carrera en un establecimiento con un perfil humanista científico. Este año, él comenzó a enseñar el curso de *Límites, derivadas e integrales* a estudiantes de 3° y 4° medio. Después de algunas clases, orientadas al *modelado de situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido* (OA3 del Programa de Estudios), Simón decidió implementar un control para monitorear el progreso de los estudiantes en el logro de este objetivo. Buscando opciones de problemas para el control, Simón encontró lo siguiente:

Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto $(2,3)$ como aparece en la figura. Encontrar $f(2)$ y $f'(2)$.



(a)

Comprueba que la tasa de variación media de

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2} \text{ en el intervalo}$$

$[1, 2]$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(1, f(1))$ y $Q(2, f(2))$. ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto $(1, f(1))$?

(b)

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

- Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en $x=2$.
- A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x=1$?

(c)





- 1) ¿Cuál de las tres opciones es la más adecuada para los propósitos de Simón? Elaboren una respuesta que justifique su elección, con base en los niveles de desarrollo del concepto de derivada propuestos por Sánchez-Matamoros y colaboradores.
- 2) Expliquen por qué las otras dos opciones no se adecúan a lo que Simón pretende.

Este problema plantea preguntas que invita a los profesores a utilizar la THA de Sánchez-Matamoros (2014) para fijar posición acerca de la pertinencia de determinadas tareas de derivada para los propósitos de enseñanza de un profesor hipotético.

REFERENCIAS

- Ministerio de Educación [MINEDUC] (2021). *Programa de estudio 3° o 4° medio. Formación diferenciada matemática. Límites, derivadas e integrales*. MINEDUC. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf
- Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación: una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Facultad de Educación de la Universidad de los Andes.
- Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (Desarrollo del concepto)* [tesis de doctorado, Universidad de Sevilla]. Depósito de investigación de la Universidad de Sevilla. <https://idus.us.es/handle/11441/73311>
- Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41-53). SEIEM.

